

ΔΗΜΟΣΘΕΝΕΙΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΙΑΝΙΑΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ:	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30/04/2015
ΟΝΟΜΑ :	

ΘΕΜΑ Α

- A1** Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα (ενδιαμέσων τιμών):
Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$.
Αν: • η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και • $f(α) \neq f(β)$
τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε : $f(x_0) = \eta$ (μονάδες : 9)
- A2** Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle. (μονάδες : 6)
- A3** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα χαρακτηρίζοντας καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις 1-5 ως **(Σ)** αν η πρόταση είναι σωστή ή **(Λ)** αν αυτή είναι λανθασμένη. (μονάδες : 10)
- 1 Για κάθε μιγαδικό Z ισχύει : $|Z| = |\overline{Z}| = |iz|$.
 - 2 Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και $f''(x_0) = 0$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .
 - 3 Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.
 - 4 Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
 - 5 Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

1	2	3	4	5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί Z, W για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις :

$$|Z|^2 + \bar{Z} \cdot W - 4 = 0 \quad \text{και} \quad |W|^2 + Z \cdot \bar{W} - 12 = 0 .$$

(B1) Να αποδείξετε ότι : $|Z + W| = 4$ (μονάδες : 6)

(B2) Να αποδείξετε ότι : $W = 3Z$ (μονάδες : 5)

(B3) Να αποδείξετε ότι η εικόνα M του Z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

Στη συνέχεια να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας N του W . (μονάδες : 8)

(B4) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση : $2 \leq (MN) \leq 4$ (μονάδες : 6)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R , με : $f(x) = (1+x^2) \left(1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt \right)$, για κάθε $x \in R$.

(Γ1) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι : $f(x) = (1+x^2) \cdot e^x$, $x \in R$. (μονάδες 8)

(Γ2) Να δείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f στο $-\infty$. (μονάδες 5)

(Γ3) Να εξετάσετε αν η f έχει ακρότατα. (μονάδες 5)

(Γ4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των αξόνων $x'x$, $y'y$, της C_f και της ευθείας $x=1$. (μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow R$, τέτοια ώστε να ισχύουν : $f'(x) \cdot e^{x+f(x)} = 2x - x^2$ και η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$.

(Δ1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο : $f(x) = 2 \ln x - x$ (μονάδες : 7)

(Δ2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το : $f(A) = (-\infty, 2 \ln 2 - 2]$

και στη συνέχεια να προσδιορίσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in R$. (μονάδες : 9)

(Δ3) Να αποδείξετε ότι : $\ln x < x$, για κάθε $x > 0$. (μονάδες : 3)

(Δ4) Να βρείτε σημείο της C_f , το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία με εξίσωση $y = x$, καθώς και την ελάχιστη αυτή απόσταση. (μονάδες : 6)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ