ΔΗΜΟΣΘΕΝΕΙΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΙΑΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 6η

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι

i. Για την συνάρτηση $G(\chi) = (\chi - \alpha)(\chi - \beta)e^{f(\chi)}$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$

ii. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Να δείξετε ότι:

(α) Η εξίσωση $\chi^3 - 3\chi + \alpha = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-1,1)$

(β) Η εξίσωση $3\chi^5 - \chi^3 = 5$ έχει ΜΙΑ ΜΟΝΟ ρίζα στο $(1,2)$

(γ) Η εξίσωση $\chi^3 + a\chi + \beta = 0$, $a > 0$ έχει ΜΙΑ ΜΟΝΟ πραγματική ρίζα

(δ) Η εξίσωση $3\alpha\chi^2 + 2\beta\chi = \alpha + \beta$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$. Να αποδείξετε ότι :

(α) Για τη συνάρτηση g με τύπο $g(\chi) = \frac{f(\chi)}{\chi - \alpha - \beta}$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

(β) Υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\chi_0, f(\chi_0))$ να διέρχεται από το σημείο $A(\alpha + \beta, 0)$

ΔΗΜΟΣΘΕΝΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΙΑΝΙΑΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

(α) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi)=8\alpha\chi^3+9\beta\chi^2+2\gamma\chi+3\delta$, όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Re$ και επίσης ισχύει $2\alpha-3\beta+\gamma-3\delta=0$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,0)$

(β) Δίνονται $\kappa,\lambda\in\Re$ με $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{\kappa}{2}+\lambda=0$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4\chi^4+3\chi^3+2\chi^2+\kappa\chi+\lambda=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

ΖΗΤΗΜΑ 5

(α) Δίνονται τα πολυώνυμα $f(\chi)$ και $P(\chi)$ ώστε να ισχύει $P(\alpha)\neq 0$ και $f(\chi)=\frac{P(\alpha)}{12}\chi^4+\frac{P(\beta)}{2}\chi^2+P(\gamma)+\delta$, όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Re$ με α<β.
Να δείξετε ότι αν το πολυώνυμο $f(\chi)$ έχει τρεις τουλάχιστον πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους, τότε το πολυώνυμο $P(\chi)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\beta]$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon$, $\alpha\neq 0$.
Να αποδείξετε ότι **αν** η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, **τότε** ισχύει $3\beta^2>8\alpha\gamma$

ΑΠΟΦΗ.ΟΡΓ.ΓΡ.ΑΝ.ΑΝ