

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....ΤΜΗΜΑ :.....

ΘΕΜΑ Α:**A1.** Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

να δείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ **7 μονάδες****A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία**4 μονάδες****A3.** Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;**4 μονάδες****A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ

- α.** Αν δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει πάντοτε $f(x) = g(x)$
- β.** Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(a) \cdot f(\beta) > 0$, τότε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.
- γ.** Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[a, \beta]$, τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα της μέσης τιμής, στο ίδιο διάστημα.
- δ.** Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
- ε.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

10 μονάδεςΘΕΜΑ Β:Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$.**B1.** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.**10 μονάδες****B2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.**5 μονάδες****B3.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αξιοποιώντας τα συμπεράσματα των ερωτημάτων B1 και B2.**5 μονάδες****B4.** Δίνεται το σημείο $A(x, f(x))$, $x > 0$, και έστω K η προβολή του στον $x'x$. Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν του τριγώνου $ΟΑΚ$.**5 μονάδες**

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ και } f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με } f'(0) = 1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

- α. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β. στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.
- γ. έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$

3 μονάδες

2 μονάδες

2 μονάδες

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

- α. ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$
- β. Η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της
- γ. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτόμενη στην αρχή των αξόνων

4 μονάδες

2 μονάδες

4 μονάδες

Γ3.

- α. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της C_f της συνάρτησης f , στο $-\infty$.
- β. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

4 μονάδες

4 μονάδες

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[1, 4]$.
Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $[-2, 3]$ και $f(1) = 2$, $f(4) = 1$ τότε:

- Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 4)$, έτσι ώστε $f(x_0) = 0$.
- Δ2. Να αποδείξετε ότι η C_f δέχεται δύο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτόμενες και έχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμψής.
- Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(1, 4)$.
- Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$, έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $P(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

3 μονάδες

5 μονάδες

4 μονάδες

5 μονάδες

- Δ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (1, 4)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ έτσι ώστε: $\frac{1}{f'(\xi_1)} - \frac{1}{2f'(\xi_2)} = -\frac{3}{2}$.

3 μονάδες

- Δ6. Ένα σημείο K κινείται στην ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ3, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο M και Λ η προβολή του K στον άξονα $x'x$. Το σημείο Λ απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ με ρυθμό 1 m/sec .
Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $K\Lambda M$ τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του K είναι ίση με τη τεταγμένη του.

5 μονάδες

- 1. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
- 2. Οι απαντήσεις να γραφούν στην κόλλα απαντήσεων.
- 3. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.