

ΔΗΜΟΣΘΕΝΕΙΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΙΑΝΙΑΣ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η (ΑΝΑΛΥΣΗ)

(1) Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - 1$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g(x) = 0$;

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g(x)$ είναι θετική;

γ) Να βρείτε: i) το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

ii) το πεδίο ορισμού B της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

iii) το πεδίο ορισμού Γ της συνάρτησης $\varphi(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(2) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(3) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(4) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \neq 3 \\ a, & x = 3 \end{cases}$.

α) Για $x \neq 3$ είναι συνεχής η συνάρτηση;

β) Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 3$;

(5) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$. Να βρείτε:

α) το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

β) την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

(6) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = ax^2$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να προσδιορίσετε το a , ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(2, f(2))$ να είναι 4.

γ) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης

- (7) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- την $f'(3)$
 - το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f , στο σημείο με $x = 3$
- (8) Ένας πληθυσμός μικροβίων P μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες) σύμφωνα με τον τύπο
- $$P(t) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1+t)^{-1}.$$
- Να βρείτε τον αρχικό αριθμό μικροβίων ($t = 0$).
 - Να βρείτε τον αριθμό των μικροβίων όταν $t = 9$ ώρες.
 - Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων ως προς το χρόνο, όταν $t = 9$ ώρες.
- (9) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $g(x) = e^x \cdot x^2$. Να βρείτε:
- Την πρώτη παράγωγο i) της f και ii) της g .
 - Τις παραγώγους i) $f'(1)$ και ii) $g'(1)$.
- (10) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- Την $f'(x)$
 - Την $f''(x)$
 - Τις τιμές του a , ώστε να ισχύει η σχέση $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (11) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε την $f'(x)$.
 - Να εξετάσετε τη μονοτονία της.
 - Να προσδιορίσετε τα ακρότατά της (αν υπάρχουν).
- (12) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- Την $f'(x)$
 - Για ποιες τιμές του x έχουμε $f'(x) = 0$
 - Ποιες από τις παραπάνω τιμές των x είναι θέσεις ακροτάτων για την f
 - Τις τιμές των ακροτάτων.
- (13) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τα κ, λ ώστε η f να έχει στη θέση $x = 1$ τοπικό ακρότατο ίσο με -2 .
 - Τι είδους ακρότατο παρουσιάζει η συνάρτηση στη θέση $x = 1$;

- (14) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα διαστήματα που η f είναι:
 α) Αύξουσα β) Φθίνουσα
- (15) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
 α) Την $f'(x)$
 β) Τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης, στα οποία οι εφαπτόμενες σ' αυτήν, είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.
- (16) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = a(x+1)^2$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.
 α) Να βρείτε την $f'(x)$.
 β) Να προσδιορίσετε τον a , ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(1, f(1))$ να είναι 4.
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης ευθείας.
- (17) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = kx^3 + \lambda x^2 + 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$.
 α) Να βρείτε την $f'(x)$.
 β) Να προσδιορίσετε τα k, λ , ώστε η f να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.
 γ) Να βρείτε τις τιμές των ακροτάτων.
- (18) Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με την ίδια περίμετρο, ποιο είναι εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδό;
- (19) Οι διαστάσεις χ και ψ ενός ορθογωνίου αυξάνουν με ρυθμό $2 \frac{cm}{sec}$ και $4 \frac{cm}{sec}$ αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς τον χρόνο t κατά την χρονική στιγμή t_0 που είναι $\chi = 25 cm$ και $\psi = 32 cm$
- (20) Σ' ένα ορθογώνιο το μήκος χ αυξάνει με ρυθμό $3 \frac{cm}{sec}$ και το πλάτος ψ ελαττώνεται έτσι, ώστε το εμβαδό του να είναι πάντοτε ίσο με $100 cm^2$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου κατά την χρονική στιγμή t_0 που είναι $\chi = 20 cm$
 (Υπόδειξη : Είναι $\chi(t_0) = 20$, $\psi(t_0) = 5$. Παραγωγίζουμε την $\chi(t) \cdot \psi(t) = 100$ και βρίσκουμε $\psi'(t_0) = -\frac{3}{4}$)
- (21) Αν $f(x) = \alpha x^2 + \beta x$, να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η C_f έχει στο σημείο της $(1,5)$ εφαπτομένη με κλίση 8
- (22) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f της $f(x) = x^3 - x$ που διέρχεται από το σημείο $A(-2,2)$

(23) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x^3 + x^2 \cdot f'(x) + f^4(x) = 3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$

(24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β) Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$

(25) Να εξετάσετε αν για την $f(x) = (\alpha + \beta x) \cdot e^{-\kappa x}$ ισχύει η σχέση $f''(x) + 2\kappa \cdot f'(x) + \kappa^2 \cdot f(x) = 0$

(26) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{4x^2 + 9x + 2}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^2 - 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

δ) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{x - \alpha}$, $\alpha > 0$

ε) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{\sqrt{3x+1} - 2}$

ζ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-6}}$

η) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x}$

θ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$

ι) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$

ια) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$

ιβ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 9x + 2}{x^2 - 4}$

ιγ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{8x+9} - 5}{x^2 - 4}$

(27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

γ) Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .

δ) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$.