ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1) Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οχψ θεωρούμε τα σημεία Α, Β του x΄x, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 1998 = 0$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in R$ ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει τετμημένη 7.

2) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-1, 3)$ και $\vec{v} = (2, -1)$. Να βρεθούν οι συνεταγμένες του διανύσματος $\vec{w} = (x, y)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ β) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$ γ) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$ δ) $\vec{w} = \kappa\vec{u} + \lambda\vec{v}$ με $\kappa, \lambda \in R$

3) Δίνονται τα σημεία Α (5, - 1), Β (1, 1) και Γ (2, 3). Να μελετηθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ.

4) Δίνονται τα σημεία Α (3, 2), Β (7, - 4). Να βρεθεί σημείο Μ του x΄x, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι:

α) ισοσκελές με κορυφή το Μ β) ορθογώνιο στο Μ

5) Να εξετάσετε αν τα σημεία Α (- 6, 1), Β (- 2, 3) και Γ (- 10, - 1) είναι συνευθειακά.

6) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 4)$ και $\vec{\beta} = (3, -2)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{u} = (\chi, \psi)$ έτσι ώστε να είναι:

α) $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ β) $\vec{\alpha} + \vec{u} = \vec{\beta}$ γ) $\vec{u} = \kappa\vec{\alpha}$, $\kappa \in R$

δ) $\vec{u} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, $\kappa, \lambda \in R$ ε) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{u} = 0$

7) Αν $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 3)$ να υπολογιστούν τα:

α) $|\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|$ β) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| + |\vec{\gamma} + \vec{\alpha}|$

8) Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{\pi}{6}$ β) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 75°$

γ) $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135°$

9) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$ γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$

δ) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ ε) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

10) Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}| = 2$ ($\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά).

11) Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων:
$\vec{\alpha} = (-1, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$.

12) Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45°$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{\alpha}, \vec{\alpha})$.

13) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{2 \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)}$

14) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

15) Αν $\vec{u}(-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $\vec{v}(-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $ο < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < \pi$ να αποδείξετε ότι: $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{12}$.

16) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-2, 3)$ και $\vec{v} = (4, -3)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι
$\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$.

17) Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} // (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{x})$.

18) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

19) Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου του για τα οποία ισχύει:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

20) Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ **ώστε να ισχύουν συγχρόνως:**

α) $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$ β) $\vec{p} // \vec{\alpha}$ γ) $\vec{q} \perp \vec{\beta}$

21) Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι: $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot \sqrt{3}$

22) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 5$

υπολογίστε το: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$