

ΔΗΜΟΣΘΕΝΕΙΟ ΓΕ.Λ. ΠΑΙΑΝΙΑΣ

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3^{2x} = \frac{1}{81}$ ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$ iii) $2^{-x} = 32$

iv) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 27$ v) $\frac{1}{2^x} = 16$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2^{x^2-5x+6} = 1$ ii) $\left[3^{(x^2-9)}\right]^{(x-2)} = 1$ iii) $4^{3x} = 2^4 \cdot 16^{\frac{x}{2}}$

iv) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ v) $3^{2x-2} + 3^x = 4$ vi) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$ ii) $5 \cdot 2^x = 2^{x+3} - 3\sqrt{2}$ iii) $3^{x+1} - 28 + 9 \cdot 3^{-x} = 0$

iv) $2^{x-2} - 3^{x-3} - 2^{x-3} + 3^{x-4} = 0$ v) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(x^2 - 5x + 5)^{x+2} = 1$ ii) $e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3^{\eta\mu 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ii) $3^{\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x} = 9^{1-2\eta\mu^2 \frac{x}{2}}$ iii) $2^{\eta\mu x} \cdot (4^{\eta\mu x})^{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt[5]{32^{\eta\mu 3x}}$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $3^{x^2-7x+6} < 1$ ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$

iii) $(0,5)^{5x-x^2-1} < 0,125$ iv) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

7. Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} 9^{x+1} = 3^{y+3} \\ 4^{x+y} = 8 \cdot 2^x \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ x + y = 8 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2^{x-1} \cdot 4^y = 1 \\ 3^x \cdot 3^{y-1} = 9 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^y = 6 \end{cases}$

8. i) Να βρείτε το ($a \neq 5$) ώστε η $f(x) = \left(\frac{1-a}{a-5}\right)^x$ να είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε το a , ($a \neq 0$) ώστε η $g(x) = \left(1 - \frac{5}{a}\right)^x$ να είναι γνησίως φθίνουσα.

9. Σ' ένα ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία (πυρετός) $\Theta(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον

τύπο $\Theta(t) = 36 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^t$ σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την φυσιολογική τιμή των $36,5^\circ\text{C}$.

γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου.

10. Ένα δείγμα 5 Kgr ενός ραδιενεργού ισότοπου διασπάται σύμφωνα με τον τύπο: $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-kt}$

όπου $Q(t)$ παριστάνει την ποσότητα που απομένει μετά από χρόνο t , $Q_0 = Q(0)$ η αρχική ποσότητα (για $t = 0$) και k σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

Αν το μισό του αρχικού δείγματος διασπάστηκε σε 10 min., να βρείτε πόση ποσότητα ραδιενεργού υλικού θα έχει απομείνει μετά από 40 min.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(1+x) = \log(1-x)$

ii) $\log(1+x) = 1 + \log(1-x)$

iii) $2\log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

iv) $\ln \frac{x}{2} = \frac{\ln x}{2}$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x(\log_{10} - \log_5) = \log(4^x - 12)$ ii) $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$

iii) $\frac{\log_2(9 - 2^x)}{3 - x} = 1$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$ ii) $\log_2(\log_2 x) = \log_4(\log_4 x)$

iii) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$

14. α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log \sqrt{3}}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log \sqrt{3}} = 0$.

15. Αν σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) ο πρώτος όρος είναι $a_1 = \log_3 3$ και ο δεύτερος όρος της είναι $a_2 = \log_3 81$.

α) Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής πρόοδου.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log_\omega x^3} - 9 \cdot 3^{\log_\omega x^2} - 9 \cdot 3^{\log_\omega x} + 81 = 0$.

16. i) Να αποδείξετε ότι: $3^{\log x} = x^{\log 3}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$

17. i) Να αποδείξετε ότι: $X^{\log_5 2} = 2^{\log_5 X}$ αν $0 < X \neq 1$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $3X^{\log_5 2} + 2^{\log_5 X} = 64$

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει γενικά $a^{\log_\beta \gamma} = \gamma^{\log_\beta a}$ με $(0 < a, \beta, \gamma \neq 1)$

18. i) Να αποδείξετε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$ με $x, y > 0$

ii) Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases}$$

iii) Αν οι λύσεις του (ii) είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$\log[\log(x^2 + x \log \theta - 110)] = 0 \text{ να βρείτε το } \theta \in \mathbb{R}_+^*$$

19. Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που οι φυσικοί τους λογάριθμοι έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -8.

20. Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε να ισχύει:

$$\log x + \log x^3 + \log x^5 + \dots + \log x^{2v-1} = 2v^2$$

21. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(\sin x) = 0$.

22. Ο θόρυβος y ενός ήχου σε dB (ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο $y = 20 \log \frac{x}{20}$ όπου x η πίεση που ασκεί το

ακουστικό κύμα στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα μετρούμενη σε μP (μικρο Pascals, $1\mu\text{P} = 10^{-6}\text{P}$).

α) Πόση πίεση ασκεί ένα αθόρυβο κύμα στα μόρια του αέρα;

β) Ένας κεραυνός άσκησε πίεση $x = 2 \cdot 10^{6,5} \mu\text{P}$ στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα. Πόσο dB ήταν ο θόρυβος που προξένησε;

Δίνεται ότι: Μια ηχητική πηγή θεωρείται αθόρυβη όταν ο θόρυβός της είναι το 20dB (όσος δηλαδή ο θόρυβος του θροΐσματος των φύλλων ενός δέντρου σε ελαφρύ φύσημα του αέρα - μικρότερος θόρυβος δεν ανιχνεύεται-).